**ממ"ן 14 -אלגוריתמים**

**מגיש: יוחאי מזוז**

**ת"ז:** 324962125

1. **הרעיון המרכזי:**

נשתמש בתכנון דינמי בשיטת Bottom-up, על מנת לפתור בעיה של מציאת המסלול במחיר המינימלי מאיבר כלשהו לשכבה הימנית ביותר(\*).

כעת כל מה שנצטרך לעשות זה למצוא את המינימום של התוצאות עבור האיברים השמאליים ביותר(אלו שבטור השמאלי ביותר) ולהחזיר אותו.

* נשים לב שהדרך שבה נשמור את התוצאה של המסלול, היא על ידי שמירת האיבר הבא במסלול ושל מחיר המסלול בתור התוצאה, בפרט זה מגדיר לנו את המסלול במחיר המינימלי, משום שנוכל לבנות את המסלול על ידי כך שנעקוב אחרי האיבר הבא במסלול, וממנו אחרי האיבר הבא במסלול(בהמשך נסביר מדוע מתקבל האיבר במחיר המינימלי ביותר) וכן הלאה.

נגדיר שווה למחיר המסלול במחיר המינימלי מהאיבר לשכבה הימנית ביותר, והשורה של האיבר הבא(כי הטור שלו זה פשוט .

נשים לב לכך ש:

כאשר כמובן האיבר הבא במסלול שמוגדר ב הוא האיבר שעבורו או null אם .

**האלגוריתם:**

נגדיר מטריצה(מערך דו-מימדי) בגודל כך שבכל תא שמורים שני ערכים, המחיר של המסלול במחיר המינימלי מהאיבר המתאים למיקום התא לשכבה הימנית ביותר והשורה של האיבר הבא במסלול בסדר הזה(ניתן להגיד שזו מטריצה בגודל אבל זה תלוי כמובן איך מיישמים וגם לשם הפשטות אתייחס לכך כמטריצה ששומרת בכל 2 איברים(זוג סדור למעשה)).

למען פשטות הכתיבה נגדיר כי מחזיר זוג סדור שמכיל את המינימום של מחירי המסלולים ואיבר שמחיר המסלול שלו הוא המינימלי מבין מחירי המסלול (הוספת המחיר תתווסף רק למחר כמובן שוב למען פשטות האלגורית, ברור כי זו פעולה אלמנטרית בסופו של דבר).

* עבור מ עד :
* מ עד 1(סדר יורד):
  + עבור מ2 עד :
* *נמצא איבר מקסימום של הטור השמאלי ביותר במטריצה (ביחס למחירי המסלולים)*
* *עבור אותו איבר מקסימום נחזיר את המסלול בינו לבין השכבה הימנית ביותר ע"י בניית מסלול בו נשים את איבר המקסימום, והוספת האיבר הבא במסלול לפי הערך בתא המתאים של איבר המקסימום בOPT, עבור האיבר הבא במסלול נחזיר גם את האיבר הבא במסלול "שלו" לפי OPT וכו'*

***נכונות:***

*ההבחנה הזאת נכונה עבור האיברים בטור הימני ביותר באופן טריוויאלי(הם בעצמם מהווים מסלול לשכבה הימנית ביותר), עבור איבר מבין שאר האיברים זה נכון שנניח ויש לנו פתרון אופטימלי, מסלול מ לשכבה הימנית ביותר נקראו לו ואת המסלול המורכב מ והמסלול המינימלי במחיר מבין המסלולים המינימליים במחיר מהאיברים אליהם יכול לנוע לשכבה הימנית ביותר, האיברים אליהם יכול לנוע אלה*

*לפי תנאי השאלה, כמובן ביחס לבעיה(\*).*

*בשניהם יש כמובן את האיבר בתחילת המסלול, האיבר הבא במסלול אחד מבין האיברים המתוארים לעיל, ולכן שאר המסלול מתאר מסלול מבין אחד מהאיברים "המותרים לתנועה" לשכבה הימנית ביותר נסמן את שאר המסלול , נשים לב שמתקיים ש*

*לפי הגדרת ניתן לטעון כי ולכן*

*ומשום שלפי הגדרת הפתרון האופטימלי נקבל*

*משמע המסלול המתחיל באיבר ומורכב מהמסלול המינימלי במחיר מבין המסלולים המינימליים במחיר לשכבה הימנית ביותר מהאיברים המותרים לתנועה הוא פתרון אופטימלי לבעיה (\*), וזה גם מראה שהמסלול שמתקבל על ידי מעקב אחרי האיברים הבאים במסלול כמו שהגדרנו במטריצה OPT הוא המסלול הנכון, משום שבאופן רקורסיבי, האיבר הנתון הוא האיבר הראשון כמובן, ושאר המסלול הוא מסלול מזערי במחיר של איבר המותר לתנועה שזאת כבר הוכחנו, עד לתנאי יציאה שזה איבר שנמצא בטור הימני ביותר כמובן.*

*ביחד עם כך שמשום שאנחנו "משתמשים" כל פעם באיברים ימניים יותר, ו"רצים" מהשכבה הימנית לשמאלית, אנחנו ניגשים רק לאיברים שכבר הוגדרו, ולכן התכנון הדינמי נכון, ביחד עם הגדרת OPT נכונה ונקבל שאכן המטריצה OPT שומרת את המסלול המינימלי במחיר מבחינת האיבר הבא במסלול והמחיר של המסלול כראוי.*

*נשים לב כי בצורה די דומה, המסלול המינימלי במחיר מהשכבה השמאלית ביותר לימנית ביותר, הוא בפרט המסלול המינימלי ביותר במחיר מאיבר בשכבה השמאלית ביותר לשכבה הימנית ביותר וזה בעצם איבר המינימום של האיברים בטור השמאלי במטריצת OPT וזה מה שהחזרנו כראוי.*

*ולכן האלגוריתם נכון.*

***סיבוכיות זמן ריצה:***

*ההגדרה של המטריצה נעשית ב, מציאת מינימום מבין 3 איברים זה פעולה שנעשית בזמן קבוע(גם אם מחשיבים כשתי פעולות נפרדות, אחת למחיר ואחת לאיבר הבא במסלול).*

*והריצה על המטריצה גם נעשית בזמן קבוע משום שאנחנו משתמשים בתכנון דינמי ולכן האיברים שניגשים אליהם כבר מוגדרים, מכאן וזו ריצה על מטריצה וביצוע פעולות בזמן קבוע על כל תא ולכן זה זמן ריצה , סך הכל זמן הריצה הוא וסיימנו.*

1. ***הרעיון המרכזי:***

*נשתמש באלגוריתם תכנון דינמי בשיטת Bottom-up, נמיין את התיבות לפי אורכן בסדר יורד ונגדיר בתור המגדל היציב הגבוה ביותר שבראשו התיבה ה,נראה כיצד ניתן לחשב אותו , (לאחר המיון כמובן), ואז נחזיר את איבר המקסימום של .*

*נגדיר*

*במילים אחרות ובאופן אינטואיטיבי, המגדל היציב הגבוה ביותר של התיבות שבראשו התיבה ה זה או התיבה i עצמה או מגדל של תיבות כך שניתן להוסיף מעליו את התיבה כראוי ולקבל מגדל יציב בעל גובה גבוה יותר מהמגדל היציב הגבוה ביותר של התיבות , בפרט נחזיר את המקסימום מבין כל המגדלים שתיארנו לעיל.*

*האינטואיציה מאחורי זה שאנחנו "מתחילים" מהמגדל היציב הגבוה ביותר של התיבות , ומורידים מלמעלה תיבות עד שנוכל לשים למעלה את התיבה הi, זה מגדל יציב, ואם הגובה שלו יותר גבוה מהתיבה האז הוא המגדל היציב הגבוה ביותר שבראשו התיבה ה(לאחר המיון), נשים לב כי*

*לכל כי התיבות 1…j-1 מוכלות בתיבות ה1…j, ולכן ברגע שנמצא מגדל שנוכל לשים מעליו את התיבה הi, נוכל לעצור.*

*ומכאן די ברור כי נחזיר את איבר המינימום של OPT כי המגדל היציב הגבוה ביותר הוא בפרט מגדל יציב גבוה ביותר שבראשו תיבה כלשהי ולכן הוא של תיבה כלשהי.*

***האלגוריתם:***

*נגדיר מערך בגודל כך שבכל תא נשמור 2 ערכים, הגובה של המגדל היציב ביותר ואינדקס התיבה שמתחת ל במגדל הזה(לאחר המיון).*

*נמיין את התיבות לפי האורך בסדר יורד(ככה ש ייצגו את התיבה הi לאחר המיון.*

* *עבור עד :*
  + *עבור עד 1*
    - *אם*

***נכונות:***

*האלגוריתם כתוב כראוי משום שאנו ניגשים רק לאינדקסים של הקטנים מ,*

*ואלו כבר הוגדרו משום שאנו מגדירים את בלולאה החיצונית בסדר עולה על האינדקסים.*

*נוכיח כי מייצג את המגדל היציב הגבוה ביותר הבנוי מהתיבות לאחר מיון בסדר יורד לפי אורך התיבות, ע"י חלוקה למקרים,*

*נשים לב כי משום שלפי המיון מתקיים כי , אזי לפי הגדרת מגדל יציב, אם במגדל יציב ישנן התיבות אז התיבה עליונה יותר מ.*

* *מקרה הראשון: התיבה היא התיבה היחידה במגדל היציב הגבוה ביותר שבראשו התיבה ה ולכן טריוויאלי כי ש משום שהמגדל הוא פשוט התיבה .*
* *מקרה שני: נניח כי התיבה היא* ***לא*** *התיבה היחידה במגדל היציב הגבוה ביותר שבראשו התיבה ה נקרא לו A, ונניח שבמגדל הזה יש מתחתיה את התיבה ה, בפרט המגדל שמתחת לתיבה ה הוא מגדל יציב שבראשו התיבה ה,ו זה גם המגדל היציב הגבוה ביותר שבראשו התיבה ה משום שאם היה מגדל יציב שבראשו גבוה יותר, אז היה ניתן לשים מעליו את התיבה ולקבל מגדל יציב גבוה יותר מA שבראשו התיבה ה, בהנחה לכך A הוא המגדל היציב הגבוה ביותר שבראשו התיבה ה.*

*מכאן שקיימת תיבה כך ש, מתקיים גם כי כי התיבה ה מעל התיבה במגדל יציב כלשהו.*

*האלגוריתם מחשב את המקסימום מבין כל האפשרויות למגדלים יציבים שבראשם התיבה ה, לפי השני המקרים הללו ולכן הוא אכן מגדיר את נכון.*

*כמו שציינתי קודם, איבר המקסימום של OPT הוא גם מגדל יציב הגבוה ביותר, כי מגדל יציב הגבוה ביותר הוא בפרט איבר של OPT.*

***זמן ריצה:***

*מיון: ניתן להשתמש במיון מיזוג בזמן ריצה*

*לולאה מקוננת: אנו רצים על כל המערך ומבצעים בלולאה הפנימית פעולות משמע אנו מבצעים*

*חישוב איבר מקסימום: ריצה על כך מערך בזמן ריצה*

*סך הכול זמן הריצה הוא:*

1. *א. אינטואיציה: מתקיים כי*

*נשים לב כי אם מתקיים:*

*אז מתקיימות כל המשוואות לעיל ובפרט אלו פולינומים המקיימים את השאלה.*

*בצורה נאיבית נבחר*

*נקבל כי ,*

*אינטואיטיבית משכנע כי*

*פתרון:*

*נכון כי עבור:*

*ב. נשתמש באלגוריתם תכנון דינמי בשיטת כך ש ייצג את פולינום האינטרפולציה של הנקודות .*

***האלגוריתם:***

* *ניצור מטריצה OPT בגודל , כך שהתא ייצג את פולינום האינטרפולציה של הנקודות .*
* *;*

*נשים לב כי אם ו אז ניתן להסיק כי ביצענו השמה בתאים בהם , ומכאן ש ולכן אנו ניגשים לתאים תקינים.*

*האלגוריתם נכון, משום שעבור מקרי בסיס (( טריוויאלי, ועבור שאר המקרים, נכון לפי המשוואה שהתקבלה בסעיף א'.*

*אלגוריתם תכנון דינמי ולכן כל תא מחושב פעם אחת בלבד, נעשים לכל היותר חישובים על פי המשוואה לעיל והשמות, אתחול המטריצה נעשית ב פעולות, ואתחול מקרי בסיס ב פעולות.*

*סך הכול סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא וסיימנו.*

*ג. אציין כי התשובה לסעיף הזה באורך של 8 עמודים בעיקר בגלל שאני הצגתי את השינויים על המטריצה, כך שבפועל האורך הוא בגלל המטריצות.*

*במילים אחרון קיבלנו את הנקודות:*

*ניצור מטריצה M בגודל (נניח כי האינדקסים מתחילים מ1):*

* *תא ריק – מיושם בו ערך empty*
* *תא כתום – המשמעות היא שהתא "מחכה" לקבלת ערך של .*
* *תא ירוק – המשמעות היא שזה התא "הנוכחי" "שמחכה" לקבלת ערך.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i/j* |
|  |  |  |  |  | *1* |
|  |  |  |  |  | *2* |
|  |  |  |  |  | *3* |
|  |  |  |  |  | *4* |
|  |  |  |  |  | *5* |

*נאתחל את המטריצה ונבצע השמה במקרי בסיס():*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i/j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של (לאחר "קבלת" הערכים הנדרשים לחישוב):*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של (לאחר "קבלת" הערכים הנדרשים לחישוב):*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של (לאחר קבלת הערך נדרש לחישוב):*

*בפועל "עוברים" לחשב את הערך השני.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של :*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של (לאחר קבלת ערכים נדרשים):*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של (לאחר קבלת ערכים נדרשים):*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*חישוב של (לאחר קבלת ערכים נדרשים):*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *i\j* |
|  |  |  |  | *98* | *1* |
|  |  |  | *10* |  | *2* |
|  |  | *0* |  |  | *3* |
|  | *2* |  |  |  | *4* |
| *46* |  |  |  |  | *5* |

*לאחר שחישבנו את , נחזיר אותו, ואכן החזרנו את*

*כנדרש.*

1. א. האלגוריתם מחשב את המשקל המינימלי למסלול מ לצומת ושומר זאת ב או שם אם לא קיים מסלול מ ל, כאשר משקל מסלול הוא כמובן סכום משקלי הקשתות במסלול.

נוכיח זאת בעזרת אינדוקציה חזקה על מספר האיטרציה של הלולאה החיצונית.

נגדיר מושג: היפוך לקסיקוגרפי במסלול – שתי צמתים צמודים במסלול שהסדר שלהם במסלול הפוך לסדר הלקסיקוגרפי שלהם, כלומר הם היפוך לקסיקוגרפי במסלול אם לקסיקוגרפית אבל המסלול הוא .

טענת האינדוקציה:

בסוף האיטרציה ה- של הלולאה החיצונית מתקיים:

*לכל צומת :*

* *(a)אם , לא קיים מסלול עם לכל היותר מ ל.*
* *(b)אם , קיים מסלול מ ל עם לכל היותר שמשקלו , ו הוא המשקל המינימלי מבין כל המסלולים עם לכל היותר מ ל .*

*נשים לב שזו בעצם ביחד   
טענת אמ"מ, כי השלילה של הטענה הראשונה, היא הטענה "מהכיוון השני" של הטענה השנייה.*

***הוכחת האינדוקציה:***

***בסיס האינדוקציה:*** *בסוף האיטרציה ה-1:*

*ואכן יש מסלול טריוויאלי של הצומת עצמו ללא קשתות, עם 0 היפוכים כמובן.*

*נניח כי , מכאן שבוצעה בו השמה באיטרציה הראשונה, נניח ובוצעה השמה על פי קשת מכאן שאם בוצעה השמה אז , וכעת או ש*

*, ואז זה מסלול ובו 0 היפוכים(קשת אחת), או שגם בצומת בוצעה השמה, על פי קשת אך על מנת שקודם תבוצע השמה ב ואז ב צריך להתקיים שהאיטרציה הפנימית קודם סורקת את הקשת ואז את הקשת , אותו דבר ניתן גם לטעון כלפי וכן הלאה עד שנגיע לצומת ובכל מקרה נקבל שיש מסלול חסר היפוכים מ ל.*

אם , נניח בשלילה כי קיים מסלול עם 0-היפוכים מ ל המסלול חסר היפוכים ולכן האיטרציה הפנימית סורקת את הקשתות כסדרן במסלול, ולכן אם המסלול הוא , אז האיטרציה הפנימית תעבור על הקשת הראשונה במסלול, תבצע השמה בתא המערך של צומת השני אם ערכו הוא אינסוף, ואז לאחר מכן תעבור על הקשת השנייה במסלול ותבצע השמה בתא המערך של הצומת השלישי אם ערכו הוא אינסוף, כך עד הקשת האחרונה שתבצע השמה ב בסתירה לכך (ההשמות יבוצעו כי כל הצמתים מאותחלים להיות , ולכן התנאי הפנימי יתקיים, אם תא המערך של הצומת "הקודם" כבר הושם למספר סופי באופן טריוויאלי).

**צעד האינדוקציה:** נניח כי התנאי מתקיים עבור נוכיח עבור :

בסוף האיטרציה ה-:

* אם , נוכיח כי *לא קיים מסלול מ ל בעל -היפוכים לכל היותר.*

*נניח בשלילה שקיים מסלול כזה, ,*

*ניתן לחלק את המסלול הזה ל חלקים, כך שההיפוכים מפרידים בין החלקים(האיבר הימני בהיפוך הוא האחרון בחלק),*

*אם המסלול הוא . כאשר זה היפוך.*

*נשים לב שבצורה דומה לתיאור שבבסיס האינדוקציה, האיטרציה הראשונה "תדאג" שלכל הצמתים שנמצאים בחלק הראשון יהיה ערך סופי(כי הם בסדר לקסיקוגרפי, ולכן אם הם לא מיושמים תהיה "תגובת שרשרת" שתבצע השמה מ עד לסוף החלק), בצורה הדומה לאחר האיטרציה השנייה, הצמתים בעלי כל החלק השני יהיו בעלי ערך סופי במערך , כך לאחר האיטרציה ה כל הצמתים שבחלקים יהיו בעלי ערכים סופיים במערך , ומכאן שלאחר איטרציות, כל הצמתים שבחלקים יהיו בעלי ערכים סופיים במערך , ואלו כל הצמתים במסלול, ולכן בפרט גם בסתירה להנחה. ומכאן שהוכחנו את טענת האינדוקציה(a).*

* אם ,

אזי באחת האיטרציות של הלולאה החיצונית, בוצעה השמה .

אם ההשמה בוצעה במהלך ה איטרציות הראשונות, ולפי הנחת האינדוקציה, נקבל שבסוף אותה איטרציה קיים מסלול מ ל בעל היפוכים לכל היותר במשקל .

(חשוב לציין שהשמות ה"זמניים" שאתן כן לצמתים הם חסרי משמעות מבחינה לקסיקוגרפית, והם בגדר כינויים, באותה צורה הייתי יכול להשתמש ב אבל זה יותר מבלבל)

אם ההשמה בוצעה באיטרציה ה של הלולאה החיצונית, אזי הייתה סדרה של קשתות(כאשר אין היפוכים ביניהן), מצומת לצומת , כך שלבסוף בוצעה השמה של וגם הצומת שלפני נקרא לו , לא עודכן באיטרציה ה משום שאז נוכל להגדיר אותו בתור וכן הלאה(במילים אחרות, הייתה תגובת שרשרת של השמות מ עד ל(, אין היפוכים בין ל, משום שאחרת סדרת ההשמות הייתה נפסקת באמצע, אך ייתכן כי יש היפוך בין לs(הצומת שלפניו זה זה שהקשת בינו לבין היא זו שעל פיה בוצעה השמה ל).

משום ש לא עודכן באיטרציה ה-n אבל הוא גם לתגובת שרשרת באיטרציה ה- אזי בסוף האיטרציה ה מתקיים

ולכן לפי הנחת האינדוקציה, בסוף האיטרציה ה קיים מסלול בין ל, במשקל בעל לכל היותר היפוכים, נמשיך את המסלול הזה לפי תגובת השרשרת מ ל, הוספנו למעשה רק היפוך אחד לכל היותר(אפשרי בין ), ומכאן ש מסלול מ ל עם לכל היותר היפוכים, משקלו הוא מכיוון שבאופן רקורסיבי, אנו מוסיפים את לצומת את הקשת בינו לבין הצומת האחרון פלוס משקל המסלול מלצומת האחרון כך ש

*מכאן שקיים מסלול מ ל במשקל עם לכל היותר היפוכים לקסיקוגרפיים.*

נוכיח שהוא במשקל מינימלי מבין כל המסלולים *עם לכל היותר היפוכים לקסיקוגרפיים.*מ ל, נניח קיים מסלול *עם לכל היותר היפוכים לקסיקוגרפיים כך ש היפוך לקסיקוגרפי( ולכן מובטח),* שמשקלו קטן מ. נתבונן ב, זה מסלול *מ ל* *עם לכל היותר היפוכים, שמשקלו קטן מ(משום שמשקלו הוא המשקל של A פחות המשקל של שאר המסלול החל מ).*

*ולכן בסוף האיטרציה ה, מתקיים כי ((לפי טענה (b)), ולכן באיטרציה ה של הלולאה החיצונית, תהיה תגובת שרשרת החל מ עד ל, נשים לב כי תבצעת ההשמה ב, על פי .*

*כך שלאחר כל ההשמות האלו יתקיים*

*, בסתירה לכך ש בסוף האיטרציה ה.*

*וסיימנו את טענת האינדוקציה.*

* *השתמשתי במושג תגובת שרשרת שמתאר מצב בו בגלל שקשתות במסלול מסודרות לפי הסדר שלהן במסלול, אז הן תתעדכנה אחת אחרי השנייה ולכן תיווצר תגובת שרשרת לאורך המסלול.*
* *נשים לב שאם יש מסלול , כאשר היפוך לקסיקוגרפי, נניח גם כי הוא היחיד, אז ההיפוך יעצור תגובת שרשרת משום שאז יסרקו קודם את החלק הראשון, אבל אז יסרקו את הקשת לפני , משמע לא עדכנו את עדיין ולכן לא נעדכן את וכן הלאה, ולכן תגובת השרשרת הופסקה והתקיימה רק לחלק הראשון, רק לבסוף נסרוק את , ולכן עדכנו רק את הצמתים .*

*סיימנו את הוכחת האינדוקציה.*

כעת כדי לסיים את ההוכחה, נניח כי מבין כל המסלולים המינימליים במשקל מ לצומת כלשהו, הוא המספר המקסימלי של היפוכים במסלול כזה מבין מספרי ההיפוכים בשאר המסלולים, אזי לאחר איטרציות, אם

אז אין מסלול מ ל,משום שאם היה, אז בפרט היה מסלול כזה מינימלי במשקל, ובפרט מספר ההיפוכים בו נקרא לו היה קטן מ לפי הגדרת , ולכן בסוף איטרציות, הייתה סתירה לשלילת טענה (a) של האינדוקציה.

אחרת אם אז לפי טענה b של האינדוקציה, p זה המשקל של מסלול מינימלי במשקל מ ל כי במסלול כזה יש לכל היותר היפוכים לפי הגדרת .

*זה מספר סופי ולכן התוכנית תיעצר בו(משום שלא יוכלו להתבצע שום השמות משום שהערכים במערך מייצגים מסלולים מזעריים במשקל כבר).*

בכיוון השני אם לא מבוצעות שום עדכונים בלולאה החיצונית, נניח שקיים כך שקיים מסלול מזערי מ ל במשקל קטן מ, נסיק כי במסלול זה, מספר ההיפוכים גדול שווה למספר האיטרציות משום שאחרת יש סתירה לטענה (b), ולכן אם נפריד את המסלול לחלקים על פי ההיפוכים, ונסתכל על החלקים שמספרם גדול שווה למספר האיטרציות, אחד מהם "עוד לא" עודכן, ולכן יתקיים עידכון אחד באיטרציה לפחות, בסתירה לכך שבאיטרציה האחרונה לא בוצעו עדכונים, ואם באף אחד מהחלקים אין צורך לעדכן אזי משקל המסלול לא קטן מ וסיימנו את סעיף א'.

ב. כמו שהראיתי, בסעיף הקודם, המספר המרבי ביותר של איטרציות בלולאה החיצונית הוא מספר ההיפוכים המקסימלי ועוד 1 במסלול מזערי במשקל מ לצומת , בגרף בעל צמתים, מסלול יכול להיות באורך מקסימלי של צמתים, בהם יכולים להיות לכל היותר היפוכים("סדר יורד"), ולכן המספר המרבי ביותר של איטרציות בלולאה החיצונית בגרף בעל קודקודים הוא ולכאן ,

סדרת גרפים כזו זו פשוט גרף הבנוי ממסלול אחד, כאשר הסדר של הצמתים ממוין הפוך לסדר הלקסיקוגרפי שלהם(נמיין אותם לפי הסדר הלקסיקוגרפי ונהפוך).

במילים אחרות סדרת גרפים אליה שייכים גרפים כך ש:

, כך ש בסדר לקסיקוגרפי.

ג. אלו גרפים שבעצם בכל מסלול מ ל אין היפוכים, ולכן באיטרציה הראשונה מבצעים השמה בכל הצמתים(בתגובת שרשרת) ובאיטרציה השנייה רק מוודאים שאין עדכונים.

בפרט קל לראות כי קבוצת הגרפים אליה שייכים גרפים מקיימת זאת:

:

, כך ש בסדר לקסיקוגרפי.

*זה בעצם גרף "קו" המסודר בסדר לקסיקוגרפי, ולכן הוא מהווה מסלול חסר היפוכים, ומכאן שיתקיים שעבור הגרפים האלה האלגוריתם ייכנס פעמיים בלבד לאיטרציה החיצונית.*

*נשים לב כי מתקיים כדרוש:*

*וסיימנו.*